

第十二章 微分方程

二阶微分方程

同步练习

12.4.一

1.微分方程 $y'' + y = 0$ 的通解为_____.

解 特征方程为 $r^2 + 1 = 0$,

解得 $r_{1,2} = \pm i$,

故所求通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

12.4.一

2. 微分方程 $2y'' - 3y' - 2y = 0$ 的通解为_____.

解 特征方程为 $2r^2 - 3r - 2 = 0$,

$$(2r + 1)(r - 2) = 0$$

解得 $r_1 = -\frac{1}{2}, r_2 = 2$

故所求通解为 $y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{2x}$

12.4.一

3. 微分方程 $y'' + 6y' + 9y = 0$ 的通解为_____.

解 特征方程为 $r^2 + 6r + 9 = 0$,

$$(r + 3)^2 = 0$$

解得 $r_{1,2} = -3$

故所求通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$

12.4.一

4. 微分方程 $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ 的特解形式为_____.

解 对应齐次特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$,

解得 $r_{1,2} = -1$

$\lambda = -1$, 是特征方程的2重根, $k = 2$

$m = 1$,

特解形式为 $\bar{y} = x^k e^{\lambda x} Q_m(x) = x^2(ax + b)e^{-x}$

有形如: $\bar{y} = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$ 的特解, $k = \begin{cases} 0 & \lambda \text{不是根} \\ 1 & \lambda \text{是单根,} \\ 2 & \lambda \text{是重根} \end{cases}$

12.4.二

1. 微分方程 $y'' + \frac{1}{k}y = 0, (k \neq 0)$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2 + \frac{1}{k} = 0$,

(1). $k > 0$ 解得 $r_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}i$,

故所求通解为 $y = C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{k}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{k}}$

(2). $k < 0$ 解得 $r_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$,

故所求通解为 $y = C_1 e^{-\frac{x}{\sqrt{-k}}} + C_2 e^{\frac{x}{\sqrt{-k}}}$

12.4.二

2. 微分方程 $2y'' - 3y' + y = 0$ 满足 $y(1) = 3, y'(1) = 1$ 的特解.

解 特征方程为 $2r^2 - 3r + 1 = 0$,

$$\text{解得 } r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 1$$

$$\text{故所求通解为 } y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^x \quad y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^x$$

$$\text{由于 } \begin{cases} y(1) = C_1 e^{\frac{1}{2}} + C_2 e = 3 \\ y'(1) = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}} + C_2 e = 1 \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} C_1 = 4e^{-\frac{1}{2}} \\ C_2 = e^{-1} \end{cases}$$

$$\text{故所求特解为 } y = 4e^{\frac{1}{2}(x-1)} + e^{x-1}$$

12.4.二

3. 设二阶常系数齐次线性微分方程的特征方程有相同实根 a ,求此微分方程,并求其通解.

解 特征方程应为 $(r - a)^2 = 0$, 即 $r^2 - 2ar + a^2 = 0$

故所求微分方程为 $y'' - 2ay' + a^2y = 0$

故所求通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{ax}$

12.4.二

4. 微分方程 $y'' - 4y' - 5y = x^2 + 3x - 2$ 的一个特解.

解 对应齐次特征方程为 $r^2 - 4r - 5 = 0$, $(r - 5)(r + 1) = 0$

解得 $r_1 = 5$ $r_2 = -1$

$\lambda = 0$, 不是特征方程的根, $k = 0$, $m = 2$,

特解形式为 $\bar{y} = x^k e^{\lambda x} Q_m(x) = ax^2 + bx + c = Q(x)$

$$Q'(x) = 2ax + b, \quad Q''(x) = 2a,$$

$$2a - 4(2ax + b) - 5(ax^2 + bx + c) = x^2 + 3x - 2$$

$$\begin{cases} -5a = 1 \\ -8a - 5b = 3 \\ 2a - 4b - 5c = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1/5 \\ b = -7/25 \\ c = 68/125 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{故所求特解为} \\ \bar{y} = -\frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{25}x + \frac{68}{125} \end{array}$$

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

12.4.二

5. 微分方程 $y'' - y = e^x \cos 2x$ 的一个特解.

解 对应齐次特征方程为 $r^2 - 1 = 0$,

解得 $r_1 = 1$ $r_2 = -1$

$\lambda = 1 + 2i$, 不是特征方程的根, $k = 0$, $m = 0$,

特解形式为 $\bar{y} = x^k e^{\lambda x} Q_m(x) = ax^2 + bx + c = Q(x)$

$$Q'(x) = 2ax + b, \quad Q''(x) = 2a,$$

$$2a - 4(2ax + b) - 5(ax^2 + bx + c) = x^2 + 3x - 2$$

$$\begin{cases} -5a = 1 \\ -8a - 5b = 3 \\ 2a - 4b - 5c = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1/5 \\ b = -7/25 \\ c = 68/125 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{故所求特解为} \\ \bar{y} = -\frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{25}x + \frac{68}{125} \end{array}$$

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$